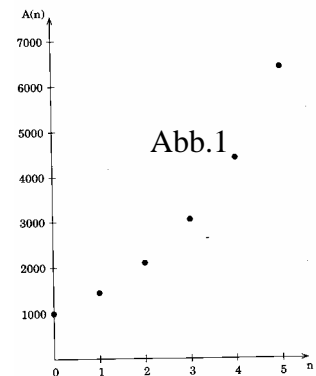
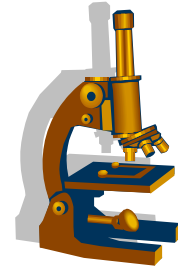


Exponentialfunktionen

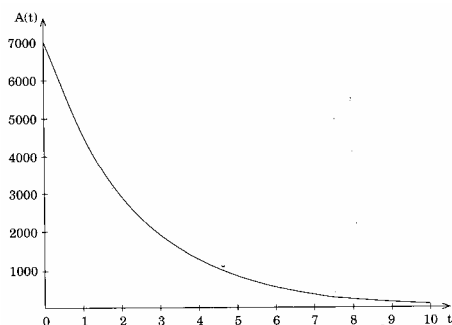
Die Beobachtung einer Bakterienkultur auf einer Nährlösung ergibt:
Zu Beginn nehmen die Bakterien eine Fläche von 1000 mm^2 ein,
die Fläche vergrößert sich pro Stunde um ca. 45%. Es sei $A(n)$ der
Inhalt dieser Fläche nach n Stunden.

- Berechne $A(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $A(n)$ auf.
- Zeichne den Graphen der Funktion A , die jedem Zeitpunkt n den Flächeninhalt $A(n)$ der Bakterienkultur zuordnet.



Die Bakterienkultur ist bereits 7000 mm^2 groß. Man stellt fest, dass durch Zugabe eines Medikaments die Bakterien absterben, wobei die Fläche in jeder Stunde um etwa 35% kleiner wird. Es sei $A(n)$ der Inhalt dieser Fläche nach n Stunden.

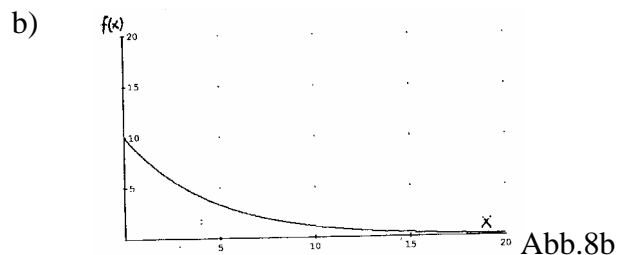
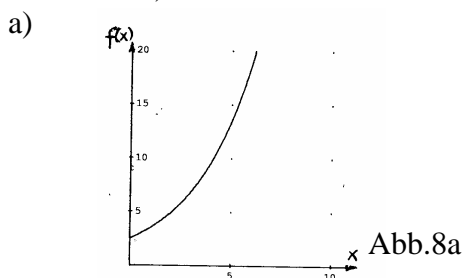
- Berechne $A(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $A(n)$ auf.
- Es sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche zum Zeitpunkt t . Stelle eine Formel für $A(t)$ auf und zeichne den Graphen der Funktion $A: t \mapsto A(t)$.



t.

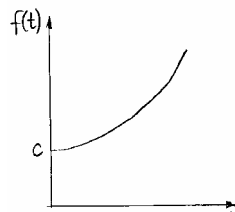
Aufgaben

- 1) Warum muss bei einer Exponentialfunktion $a \geq 0$ vorausgesetzt werden?
Warum ist es außerdem sinnvoll, die Werte $a = 0$ und $a = 1$ auszuschließen?
- 2) Eine Stadt hat derzeit ca. 15 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl wächst jährlich um ca. 8%. Es sei $E(n)$ die Einwohnerzahl nach n Jahren.
 - a) Berechne $E(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $E(n)$ auf.
 - b) Zeichne den Graphen der Funktion $E: n \mapsto E(n)$ für $1 \leq n \leq 5$.
 - c) Stelle eine Formel für die Einwohnerzahl $E(t)$ zum Zeitpunkt t auf (wobei t nicht natürlich sein muss). Welche Annahme muss getroffen werden?
 - d) Zeichne den Graphen der Funktion $E: t \mapsto E(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ (Computer!).
- 3) Eine Flüssigkeit in einem Glas hat eine Temperatur von 80°C . Das Glas wird in Eiswasser der Temperatur 0°C getaucht. Dabei kühlt sich die Flüssigkeit in dem Glas pro Minute um ca. 12% ab. Es sei $T(n)$ die Temperatur der Flüssigkeit nach n Minuten.
 - a) Berechne $T(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $T(n)$ auf.
 - b) Zeichne den Graphen der Funktion $T: n \mapsto T(n)$ für $0 \leq n \leq 5$.
 - c) Stelle eine Formel für die Temperatur $T(t)$ der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t auf (wobei t nicht natürlich sein muss). Welche Annahme muss getroffen werden?
 - d) Zeichne den Graphen der Funktion $T: t \mapsto T(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ (Computer!).
- 4) Wir nehmen an, dass von einem radioaktiven Stoff zu Beginn 1 000 000 Atome vorhanden sind und die Anzahl der noch unzerfallenen Atome pro Stunde um ca. 15% abnimmt. Es sei $N(n)$ die Anzahl der noch unzerfallenen Atome nach n Stunden.
 - a) Berechne $E(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und zeichne den Graphen der Funktion $N: n \mapsto N(n)$.
 - b) Welche Annahme muss getroffen werden, damit man die Punkte in dem Graphen durch eine ununterbrochene Linie verbinden darf? Gib das Zerfallsgesetz an und zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$ (Computer!).
- 5) Eine bestimmte Menge des radioaktiven Elementes Polonium 218 zerfällt annähernd nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = 1\,500\,000 \cdot 0,83445^t$ (t in Tagen).
 - a) Wie viele unzerfallene Atome sind zu Beginn vorhanden?
 - b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 2, 7, 14 bzw. 30 Tagen noch vorhanden?
 - c) Zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$ (Computer!).
- 6) In einer Bakterienkultur, in der zu Beginn der Beobachtung etwa 10 000 Bakterien vorhanden sind, teilen sich die Zellen ungefähr alle 3 Stunden.
 - a) Berechne im Kopf, wie viele Bakterien nach 12 Stunden, nach 1 Tag und nach 2 Tagen vorhanden sind.
 - b) Stelle ein Wachstumsgesetz der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf.
(Hinweis: Berechne a aus $N(3)$.)
- 7) In der folgenden Abbildung ist ein exponentieller Prozess dargestellt. Gib näherungsweise ein Wachstums- bzw. Abnahmengesetz an.
(Hinweis: Ermittle einen Funktionswert für $x > 0$ durch Messung und berechne daraus die Basis a .)



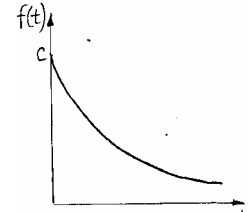
Exponentielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

In den Anwendungen betrachtet man meist zeitliche Abhängigkeiten der Form $f(t) = c \cdot a^t$, wobei $c > 0$ und $t \geq 0$. Falls $a > 1$, liegt ein **exponentieller Wachstumsprozess** vor, falls $0 < a < 1$, liegt ein **exponentieller Abnahmeprozess** vor (siehe Aufgabe 1.0x). Wegen $f(0) = c \cdot a^0 = c$ ist c der Anfangswert dieses Prozesses (siehe Abb.5a,b). Man stellt einen solchen Prozess daher oft in der Form $f(t) = f(0) \cdot a^t$ dar. Man bezeichnet diese Gleichung als **exponentielles Wachstumsgesetz** bzw. **exponentielles Abnahmegesetz**, je nachdem, ob $a > 1$ oder $0 < a < 1$ ist.



Exponentielles Wachstum

Abb.5a:



Exponentielle Abnahme

Abb.5b:

$$f(t) = c \cdot a^t \text{ mit } c > 0 \text{ und } a > 1 \quad f(t) = c \cdot a^t \text{ mit } c > 0 \text{ und } 0 < a < 1$$

Einen wichtigen exponentiellen Abnahmeprozess stellt der **radioaktive Zerfall** dar. Beim radioaktiven Zerfall zerfallen die Atome eines radioaktiven Stoffes, d.h. sie wandeln sich (unter Aussendung von Strahlung) in Atome eines anderen Stoffes um. Die Anzahl der noch unzerfallenen Atome nimmt dabei exponentiell ab. Ist $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch unzerfallenen Atome und $N_0 = N(0)$ die Anzahl der unzerfallenen Atome zu Beginn, so gilt die folgende Formel:



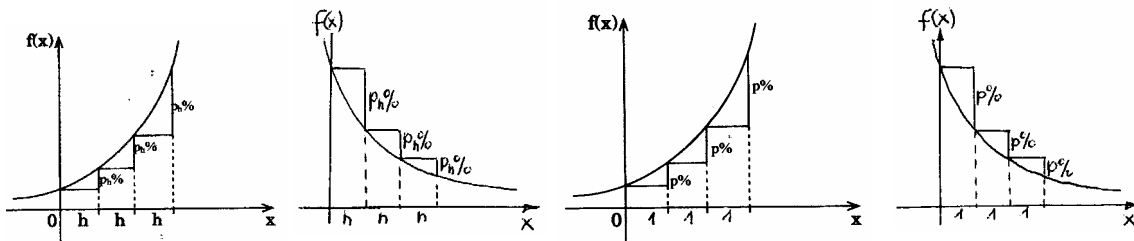
Abb.6

AchtungRadioaktivität:

Radioaktives Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ (mit $0 < a < 1$)

Da die Masse des noch vorhandenen radioaktiven Stoffes zur Anzahl der noch unzerfallenen Atome direkt proportional ist, gilt ein analoges Zerfallsgesetz für die Masse.

Prozentuelle Zu- bzw. Abnahme



Gleiche Zunahme der Argumente (um h) bewirkt stets eine Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor (a^h) bzw. um denselben Prozentsatz (p_h) vom jeweiligen Ausgangswert

Grundaufgaben

- 8) Beantworte für die folgende Funktion, ohne zu rechnen: Auf das Wievielfache wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?
- a) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = 10 \cdot 1,5^x$ e) $f(x) = 0,5^x$ g) $f(x) = 100 \cdot 0,85^x$
b) $f(x) = 2 \cdot 3^x$ d) $f(x) = 3,98 \cdot 1,15^x$ f) $f(x) = 4 \cdot 0,25^x$ h) $f(x) = 2,04 \cdot 0,34^x$
- 9) Auf das Wievielfache wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 5 erhöht wird?
- a) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 0,5 \cdot 12,1^x$ e) $f(x) = 0,6^x$ g) $f(x) = 14 \cdot 0,95^x$
b) $f(x) = 4 \cdot 2^x$ d) $f(x) = 1,11 \cdot 1,02^x$ f) $f(x) = 3 \cdot 0,12^x$ h) $f(x) = 3,77 \cdot 0,18^x$
- 10) Die Bevölkerung einer Stadt wächst in einem bestimmten Zeitraum annähernd exponentiell nach dem folgenden Wachstumsgesetz. Dabei ist $E(t)$ die Einwohnerzahl nach t Jahren. Wie viele Einwohner sind zu Beginn vorhanden? Um wie viel Prozent nimmt die Einwohnerzahl jährlich zu?
- a) $N(t) = 1200 \cdot 1,05^t$ c) $N(t) = 3900 \cdot 1,09^t$ e) $N(t) = 10\,500 \cdot 1,1^t$
b) $N(t) = 2850 \cdot 1,12^t$ d) $N(t) = 4100 \cdot 1,14^t$ f) $N(t) = 15\,000 \cdot 1,17^t$
- 11) Eine ansteckende Krankheit breitet sich in einem kurzen Zeitraum annähernd exponentiell aus. Für die Anzahl $N(t)$ der Erkrankten nach t Tagen gilt ungefähr: $N(t) = 2 \cdot 1,01^t$.
- a) Was bedeuten die Zahlen 2 und 1,01?
b) Auf das Wievielfache steigt die Anzahl der Erkrankten pro Tag?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Erkrankten pro Tag zu?
d) Auf das Wievielfache steigt die Anzahl der Erkrankten in 10 Tagen?
e) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Erkrankten in 10 Tagen zu?
- 12) Wir nehmen an, dass sich die Seerosen in einem Teich während eines kurzen Zeitraums annähernd exponentiell vermehren. Nach t Tagen nehmen sie ungefähr den Flächeninhalt $A(t) = 20 \cdot 1,11^t$ (m^2) ein.
- a) Welchen Flächeninhalt nehmen die Seerosen zu Beginn ein?
b) Auf das Wievielfache steigt der Flächeninhalt pro Tag?
c) Um wie viel Prozent nimmt der Flächeninhalt täglich zu?
d) Auf das Wievielfache steigt der Flächeninhalt in einer Woche? Wie groß ist er in einer Woche?
e) Um wie viel Prozent steigt der Flächeninhalt in einer Woche?
f) Zeichne den Graphen der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ für $0 \leq t \leq 7$ (Computer!).
- 13) Ein bestimmtes Pulver löst sich in Wasser so auf, dass nach t Sekunden nur mehr $N(t) = 100 \cdot 0,9^t$ Gramm des ungelösten Pulvers vorhanden sind.
- a) Wie viel Pulver wurde in das Wasser geschüttet?
b) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde ab?
d) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers in einer Minute?
e) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Minute ab?
- 14) Ein Körper wird in einen Kühlraum gestellt, in dem eine Temperatur von 0°C herrscht. Der Körper kühlt sich exponentiell ab, wobei für seine Temperatur $T(t)$ nach t Minuten gilt: $T(t) = 65 \cdot 0,87^t$ ($^\circ\text{C}$).
- a) Welche Temperatur hat der Körper zu Beginn?
b) Auf welchen Bruchteil sinkt die Temperatur des Körpers pro Minute? Auf welchen Bruchteil in 5 Minuten?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Temperatur pro Minute ab? Um wie viel Prozent in 10 Minuten?
d) Zeichne den Graphen der Funktion $T: t \mapsto T(t)$ für $0 \leq t \leq 10$ (Computer!).
- 15) Der Baumbestand eines Waldes nimmt erfahrungsgemäß um ca. 12% pro Jahr zu. Zu Beginn sind 268 Bäume im Wald. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Bäume nach t Jahren.

- a) Ermittle eine Termdarstellung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ und zeichne ihren Graphen für $0 \leq t \leq 10$ (Computer!).
- b) Wie viele Bäume sind nach 10 Jahren im Wald?
- 16) Das radioaktive Element Wismut 210 zerfällt annähernd nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot 0,87^t$ ($N(t)$ in Gramm, t in Jahren).
- a) Auf welchen Bruchteil sinkt die Wismutmenge pro Jahr bzw. in zwei Jahren ab?
- b) Um wie viel Prozent nimmt die Wismutmenge jährlich bzw. in 10 Jahren ab?
- c) Zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$, wenn zu Beginn 100 Gramm Wismut vorhanden sind (Computer!).
- 17) Ein bestimmter Bakterienstamm auf einer Nährlösung nimmt stündlich um ca. 11% zu. Zu Beginn zählt man ca. 600 Bakterien. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Stunden.
- a) Ermittle eine Termdarstellung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ und zeichne ihren Graphen für $0 \leq t \leq 8$.
- b) Wie viele Bakterien sind nach 8 Stunden vorhanden?
- 18) Beim radioaktiven Element Thallium 210 nimmt die Anzahl der unzerfallenen Atome pro Minute um ca. 5% ab.
- a) Gib das Zerfallsgesetz an, wenn zu Beginn 10^9 Atome vorhanden sind.
- b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 100 Minuten noch vorhanden?
- 19) Beim radioaktiven Element Blei 206 nimmt die Anzahl der unzerfallenen Atome pro Tag um ca. 0,5% ab.
- a) Gib das Zerfallsgesetz an, wenn zu Beginn 10^{12} Atome vorhanden sind?
- b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 10 Jahren noch ungefähr vorhanden? (Rechne 1 Jahr mit 365 Tagen.)

Anwendungsaufgaben zu Exponentialfunktionen

Ermittlung des Wachstums- bzw. Abnahmegesetzes aus zwei Werten

- 20) Die Anzahl der Bakterien auf einer Nährlösung wächst annähernd exponentiell. Zwei Stunden nach Beginn des Wachstums zählt man 800 Bakterien, nach weiteren zwei Stunden 2200 Bakterien. Wie viele Bakterien waren am Anfang vorhanden und wie viele sind es nach 12 Stunden?
- 21) Von einem exponentiellem Wachstumsprozess kennt man zwei Werte. Stelle das Wachstumsgesetz auf.
- a) $N(3) = 84,38$, $N(4) = 126,56$ c) $N(2) = 131,71$, $N(4) = 165,22$
b) $N(1) = 57,6$, $N(2) = 103,68$ d) $N(3) = 486,20$, $N(6) = 562,84$
- 22) Von einem exponentiellem Abnahmeprozess kennt man zwei Werte. Stelle das Abnahmegesetz auf.
- a) $N(3) = 3,43$, $N(5) = 1,68$ c) $N(1) = 805,20$, $N(6) = 68,01$
b) $N(4) = 105,35$, $N(5) = 102,19$ d) $N(2) = 16,000$, $N(6) = 0,0082$
- 23) Die Keime in der Kuhmilch vermehren sich exponentiell. In 1 cm^3 Kuhmilch waren 3 Stunden nach dem Melken 66 000 Keime, 2 Stunden später 1,1 Millionen. Wie viele Keime waren es 2 bzw. 6 Stunden nach dem Melken?
- 24) Ein Gewässer wurde mit einem Umweltgift verseucht, das durch chemische Zersetzung annähernd exponentiell abgebaut wird. In einem Liter Wasser sind zwei Jahre nach der Vergiftung noch 2 mg des Giftes, drei Jahre später noch 1 mg vorhanden. Es sei $N(t)$ die Giftmenge (in mg pro Liter Wasser) nach t Jahren.
- a) Stelle eine Formel für $N(t)$ auf.
- b) Welche Giftmenge ist nach 20 Jahren noch vorhanden?

Ermittlung von Größen im Exponenten

- 25) Eine Bakterienkultur wächst ungefähr um 15% pro Stunde. Wenn am Anfang 200 000 Bakterien vorhanden sind, nach wie vielen Stunden sind es 500 000?
- 26) Ein exponentieller Wachstumsprozess verläuft annähernd nach dem Wachstumsgesetz $N(t) = 5 \cdot 1,12^t$, Zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$ (Computer!). Ermittle sowohl graphisch als auch rechnerisch, für welche t gilt:
a) $t = 6$ b) $t = 6,5$ c) $5 \leq N(t) \leq 6$ d) $N(t) \geq 7$
- 27) Wir nehmen an, dass sich ein grippaler Infekt innerhalb eines kurzen Zeitraums annähernd exponentiell ausbreitet, wobei die Anzahl der Erkrankten täglich um ca. a) 15%, b) 20%, c) 25% zunimmt. Wenn die Ansteckung von einem Menschen ausgeht, nach wie vielen Tagen werden mindestens 1000 Menschen erkrankt sein?
- 28) Der Inhalt der Fläche, die ein Bakterienstamm auf einer Nährlösung einnimmt, vermindert sich durch Zugabe eines Heilmittels stündlich um ca. 5%. Zu Beginn beträgt der Flächeninhalt 1000 mm^2 , nach t Stunden beträgt er $A(t) \text{ mm}^2$. Zeichne den Graphen der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ (Computer!). Ermittle sowohl graphisch als auch rechnerisch, wann der Flächeninhalt unter a) 900 mm^2 , b) 800 mm^2 , c) 750 mm^2 sinkt.
- 29) Die Bevölkerung einer Stadt ist von 1995 bis 2004 annähernd exponentiell gewachsen. Im Jahre 2000 hatte die Stadt 42 000 Einwohner, im Jahre 2004 hatte sie 50 000 Einwohner. Wir gehen von der Annahme aus, dass das Wachstum noch einige Jahre so weitergehen wird.
a) Wie viele Einwohner wird die Stadt im Jahre 2008 haben?
b) Wann wird die Stadt mindestens 65 000 Einwohner haben?
(Hinweis: Zähle die Jahre von 1995 an.)
- 30) In einer Bakterienkultur sind nach 2 Tagen ca. 350 000 Bakterien, nach 5 Tagen ca. 500 000 Bakterien.
a) Wie viele Bakterien waren es am Anfang?
b) Wie viele Bakterien sind es nach einer Woche?
c) Nach wie vielen Tagen werden es 10 Millionen Bakterien sein?

Verdopplungszeit und Halbwertszeit

- 31) Eine Bakterienkultur wächst um ungefähr 18% in der Stunde. Nach welcher Zeit verdoppelt sich die Bakterienanzahl?
- 32) Das radioaktive Element Polonium 218 zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot 0,83445^t$ (t in Tagen). Nach wie vielen Tagen ist nur mehr die Hälfte der unzerfallenen Atome vorhanden?

Wird ein exponentieller Wachstumsprozess (Abnahmeprozess) durch $N(t) = N_0 \cdot a^t$ beschrieben, so nennt man die Zeit t , in der N verdoppelt (halbiert) wird, die **Verdopplungszeit (Halbwertszeit)** des Prozesses. Diese Zeit hängt nur von der Basis a ab, nicht aber vom Ausgangswert N_0 . Die Halbwertszeit spielt insbesondere beim radioaktiven Zerfall eine Rolle, weil sie ein Maß dafür darstellt, wie schnell der betreffende radioaktive Stoff zerfällt.

- 33) Das folgende radioaktive Element zerfällt nach dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Wir nehmen $N_0 = 10^6$ an. Ermittle aufgrund der angegebenen Halbwertszeit die Basis a und schreib das Zerfallsgesetz an.
- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| a) Thallium 210: 13,2 Minuten | d) Blei 206: 140 Tage |
| b) Blei 214: 3,05 Minuten | e) Radon 222: 1620 Jahre |
| c) Wismut 210: 5 Tage | f) Radium 226: 83000 Jahre |
- 34) Die Halbwertszeit von Cäsium 137 beträgt ca. 30 Jahre. Wann ist die durch den Reaktorunfall in Tschernobyl verursachte Cäsiumbelastung auf 10% ihres Maximalwertes zurückgegangen?
- 35) Von einer Probe des radioaktiven Isotops Barium 140 sind nach einem Tag 5,2% zerfallen.
- Stelle ein Zerfallsgesetz auf.
 - Wie viel Prozent der ursprünglichen Substanz sind nach 6 Stunden noch vorhanden?
 - Wann sind nur noch 0,001% der ursprünglichen Substanz vorhanden?
- 36) Barium 140 hat eine Halbwertszeit von 13 Tagen.
- Stelle das Zerfallsgesetz auf.
 - Wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Bariummenge sind nach zwei Tagen noch vorhanden?
 - Nach wie vielen Stunden zerfallen jeweils 5% des Bariums?
 - Wenn am Anfang 3,2 mg Barium vorhanden sind, nach welcher Zeit sind nur mehr 0,1 mg Barium vorhanden?
 - Wenn am Anfang 3,2 mg Barium vorhanden sind, wie viel mg Barium zerfallen am 1. Tag? Wie viel am 10. Tag?
- 37) Das Kohlenstoffisotop C 14 ist radioaktiv mit der Halbwertszeit 5760 Jahre. Es kommt in der Atmosphäre sowie in lebenden Organismen vor. Sein Anteil bleibt konstant, so lange die Organismen leben, verringert sich jedoch nach deren Tod entsprechend dem radioaktiven Zerfallsprozess.
- Ein Tierskelett enthält nur mehr 10% des ursprünglichen C 14-Anteils. Wie alt ist das Skelett? (*Hinweis:* Wähle als Zeiteinheit 1000 Jahre.)
 - Bei Ausgrabungen einer babylonischen Stadt, die zurzeit König Hammurabis gebaut wurde, fand man im Jahre 1950 in einem Holzstück nur mehr 64% des ursprünglichen C 14-Anteils. Wann hat König Hammurabi ungefähr gelebt?
- 38) Ein durch chemische Schadstoffe verunreinigtes Gewässer kann jährlich 30% der Schadstoffe abbauen. Nach wie vielen Jahren wird die Schadstoffmenge nur noch
- 10%, b) 1%, c) 1‰ der ursprünglichen Menge betragen?
- 39) Derzeit leben ca. 5,8 Milliarden Menschen, die Verdopplungszeit der Erdbevölkerung beträgt ca. 180 Jahre. Wenn wir die (sehr unrealistische) Annahme treffen, dass dieses Wachstumsverhalten immer gegeben war, wann müssten Adam und Eva gelebt haben?
- 40) Die Gewerkschaft eines Landes fordert, dass die Löhne pro Jahr um 5% steigen müssen. Jemand verdient heute 9 000 Euro monatlich. Wie viel würde er in 2 bzw. 5 Jahren verdienen, wenn die Forderung der Gewerkschaft erfüllt wird? Wann würde er doppelt so viel verdienen wie heute?
- 41) Wir nehmen an, dass es in einem Land eine jährliche Preissteigerung von 3% gibt, d.h. jede Ware kostet in jedem Jahr um 3% mehr als im Vorjahr. Das Wievielfache kostet eine Ware nach 5, 10, 20 Jahren? Nach wie viel Jahren kostet eine Ware ungefähr das Doppelte des ursprünglichen Preises?